

MATHEMATIK

Bildungs- und Lehraufgabe:

Der Mathematikunterricht soll beitragen, dass Schülerinnen und Schülern ihrer Verantwortung für lebensbegleitendes Lernen besser nachkommen können. Dies geschieht vor allem durch die Erziehung zu analytisch-folgerichtigem Denken und durch die Vermittlung von mathematischen Kompetenzen, die für viele Lebensbereiche grundlegende Bedeutung haben. Beim Erwerben dieser Kompetenzen sollen die Schülerinnen und Schüler die vielfältigen Aspekte der Mathematik und die Beiträge des Gegenstandes zu verschiedenen Bildungsbereichen erkennen.

Die mathematische Beschreibung von Strukturen und Prozessen der uns umgebenden Welt, die daraus resultierende vertiefte Einsicht in Zusammenhänge und das Lösen von Problemen durch mathematische Verfahren und Techniken sind zentrale Anliegen des Mathematikunterrichts.

Mathematische Kompetenzen

Kompetenzen, die sich auf Kenntnisse beziehen:

Sie äußern sich im Vertrautsein mit mathematischen Inhalten aus den Bereichen Zahlen, Algebra, Analysis, Geometrie und Stochastik.

Kompetenzen, die sich auf Begriffe beziehen:

Sie äußern sich in der Fähigkeit, mathematische Begriffe mit adäquaten Grundvorstellungen zu verknüpfen. Die Schülerinnen und Schüler sollen Mathematik als spezifische Sprache zur Beschreibung von Strukturen und Mustern, zur Erfassung von Quantifizierbarem und logischen Beziehungen sowie zur Untersuchung von Naturphänomenen erkennen.

Kompetenzen, die sich auf mathematische Fertigkeiten und Fähigkeiten beziehen, äußern sich im Ausführen der folgenden mathematischen Aktivitäten:

- *Darstellend - interpretierendes Arbeiten* umfasst alle Aktivitäten, die mit der Übersetzung von Situationen, Zuständen und Prozessen aus der Alltagssprache in die Sprache der Mathematik und zurück zu tun haben; auch der innermathematische Wechsel von Darstellungsformen gehört zu diesen Aktivitäten
- *Formal - operatives Arbeiten* umfasst alle Aktivitäten, die auf Kalkülen bzw. Algorithmen beruhen, also das Anwenden von Verfahren, Rechenmethoden oder Techniken
- *Experimentell - heuristisches Arbeiten* umfasst alle Aktivitäten, die etwa mit zielgerichtetem Suchen nach Gesetzmäßigkeiten, mit Variation von Parametern oder dem Aufstellen von induktiv gewonnenen Vermutungen zu tun haben; auch das Ausführen von Simulationen, das Untersuchen von Grenz- und Spezialfällen sowie das Übergehen zu Verallgemeinerungen gehören in der experimentellen Phase zu diesen Aktivitäten
- *Kritisch - argumentatives Arbeiten* umfasst alle Aktivitäten, die mit Argumentieren, Hinterfragen, Ausloten von Grenzen und Begründen zu tun haben; das Beweisen heuristisch gewonnener Vermutungen ist ein Schwerpunkt dieses Tätigkeitsbereichs

Aspekte der Mathematik

Schöpferisch - kreativer Aspekt:

Mathematik ist eine Schulung des Denkens, in der Arbeitstechniken vermittelt, Strategien aufgebaut, Phantasie angeregt und Kreativität gefördert werden

Sprachlicher Aspekt:

Mathematik ist ein elaboriertes Begriffsnetz, ein ständiges Bemühen um exakten Ausdruck, in dem die Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen entwickelt sowie die sprachliche Ausdrucksfähigkeit gefördert werden

Erkenntnistheoretischer Aspekt:

Mathematik ist eine spezielle Form der Erfassung unserer Erfahrungswelt; sie ist eine spezifische Art, die Erscheinungen der Welt wahrzunehmen und durch Abstraktion zu verstehen; Mathematisierung eines realen Phänomens kann die Alltagserfahrung wesentlich vertiefen

Pragmatisch- anwendungsorientierter Aspekt:

Mathematik ist ein nützliches Werkzeug und Methodenreservoir für viele Disziplinen und Voraussetzung für viele Studien bzw. Berufsfelder

Autonomer Aspekt:

Mathematische Gegenstände und Sachverhalte bilden als geistige Schöpfungen eine deduktiv geordnete Welt eigener Art, in der Aussagen - von festgelegten Prämissen ausgehend - stringent abgeleitet werden können; Mathematik befähigt damit, dem eigenen Denken mehr zu vertrauen als fremden Meinungsmachern und fördert so den demokratischen Prozess

Kulturell - historischer Aspekt:

Die maßgebliche Rolle mathematischer Erkenntnisse und Leistungen in der Entwicklung des europäischen Kultur- und Geisteslebens macht Mathematik zu einem unverzichtbaren Bestandteil der Allgemeinbildung

Beitrag zu den Aufgabenbereichen der Schule:

Die bereits im Lehrplan der Unterstufe definierten Beiträge sind altersadäquat weiter zu entwickeln und zu vertiefen.

Beiträge zu den Bildungsbereichen:

Sprache und Kommunikation:

Mathematik ergänzt und erweitert die Umgangssprache vor allem durch ihre Symbole und ihre Darstellungen, sie präzisiert Aussagen und verdichtet sie; neben der Muttersprache und den Fremdsprachen wird Mathematik so zu einer weiteren Art von Sprache

Mensch und Gesellschaft:

Der Unterricht soll aufzeigen, dass Mathematik in vielen Bereichen des Lebens (Finanzwirtschaft, Soziologie, Medizin usw.) eine wichtige Rolle spielt

Natur und Technik:

Viele Naturphänomene lassen sich mit Hilfe der Mathematik adäquat beschreiben und damit auch verstehen; Die Mathematik stellt eine Fülle von Lösungsmethoden zur Verfügung, mit denen Probleme bearbeitbar werden

Kreativität und Gestaltung:

Mathematik besitzt neben der deduktiven auch eine induktive Seite; vor allem das Experimentieren an neuen Aufgabenstellungen und Problemen macht diese Seite sichtbar, bei der Kreativität und Einfallsreichtum gefördert werden

Gesundheit und Bewegung:

Durch die Bearbeitung mathematisch beschreibbarer Phänomene aus dem Gesundheitswesen und dem Sport können Beiträge zu diesem Bildungsbereich geleistet werden

Didaktische Grundsätze:

Im Mathematikunterricht soll verständnisvolles Lernen als individueller, aktiver und konstruktiver Prozess im Vordergrund stehen. Die Schülerinnen und Schüler sollen durch eigene Tätigkeiten Einsichten gewinnen und so mathematische Begriffe und Methoden in ihr Wissenssystem einbauen.

Zur Sicherung des Unterrichtsertrages bieten sich Einzel-, Team- und Gruppenarbeiten, Projektarbeiten und regelmäßige Hausübungen an. Der Zeitrahmen für Schularbeiten ist dem Abschnitt „Leistungsfeststellung“ des Dritten Teiles zu entnehmen.

Im Sinne der Methodenvielfalt ist bei jedem der folgenden Grundsätze eine Bandbreite der Umsetzung angegeben, innerhalb der eine konkrete Realisierung - angepasst an die jeweilige Unterrichtssituation - zu erfolgen hat. Wenn von minimaler und maximaler Realisierung die Rede ist, ist dies nicht im Sinne einer Wertung zu verstehen.

Lernen in anwendungsorientierten Kontexten

Anwendungsorientierte Kontexte verdeutlichen die Nützlichkeit der Mathematik in verschiedenen Lebensbereichen und motivieren so dazu, neues Wissen und neue Fähigkeiten zu erwerben. Vernetzungen der Inhalte innerhalb der Mathematik und durch geeignete fächerübergreifende Unterrichtssequenzen sind anzustreben. Die minimale Realisierung besteht in der Thematisierung mathematischer Anwendungen bei ausgewählten Inhalten, die maximale Realisierung in der ständigen Einbeziehung anwendungsorientierter Aufgaben- und Problemstellungen zusammen mit einer Reflexion des jeweiligen Modellbildungsprozesses hinsichtlich seiner Vorteile und seiner Grenzen.

Lernen in Phasen

Unter Beachtung der Vorkenntnisse sind Begriffe in der Regel in einer ersten Phase auf einer konkret-anschaulichen, intuitiven oder heuristischen Ebene zu behandeln, bei einfachen Anwendungen zu erproben und erst in einer späteren Phase zu vertiefen, ergänzen, verallgemeinern oder exaktifizieren. Die minimale Realisierung besteht in der Orientierung am Vorwissen der Schülerinnen und Schüler und der Einführung von

Begriffen über intuitive und heuristische Ansätze mit exemplarischen Exaktifizierungen, die maximale Realisierung in einer weit reichenden Präzisierung mathematischer Begriffe, Sätze und Methoden.

Lernen im sozialen Umfeld

Der Einsatz passender Sozialformen ist auf die angestrebten Lernziele, die Eigenart der Inhalte und auf die jeweilige Lerngruppe abzustimmen. Hilfreich für jeden Lernprozess ist ein konstruktives Klima zwischen den Schülerinnen und Schülern einerseits sowie den Lehrerinnen und Lehrern und Schülerinnen und Schülern andererseits. Die minimale Realisierung besteht im situationsbezogenen Wechsel der Sozialformen im Unterricht, die maximale Realisierung im Vermitteln elementarer Techniken und Regeln für gute Team- und Projektarbeit sowie in der Kooperation mit außerschulischen Expertinnen und Experten.

Lernen unter vielfältigen Aspekten

Einzelne Inhalte und Probleme sind aus verschiedenen Blickwinkeln zu sehen und aus verschiedenen Richtungen zu beleuchten. Vielfältige Sichtweisen sichern eine große Flexibilität bei der Anwendung des Gelernten. Die minimale Realisierung besteht in der gelegentlichen Verdeutlichung verschiedener Sichtweisen bei der Behandlung neuer Inhalte, die maximale Realisierung im konsequenten Herausarbeiten der Vor- und Nachteile verschiedener Zugänge. Damit wird ein vielschichtiges und ausgewogenes Bild der Mathematik gewonnen.

Lernen mit instruktorischer Unterstützung

Lernen ohne instruktorische Unterstützung ist in der Regel - insbesondere in Mathematik - ineffektiv und führt leicht zur Überforderung. Lehrerinnen und Lehrer müssen Schülerinnen und Schüler anleiten und insbesondere bei Problemen gezielt unterstützen. Die minimale Realisierung besteht in der Bereitstellung von schüleradäquaten Lernumgebungen und Lernangeboten, die maximale Realisierung in Differenzierungsmaßnahmen, durch die individuelle Begabungen, Fähigkeiten, Neigungen, Bedürfnisse und Interessen gefördert werden.

Lernen mit medialer Unterstützung

Die Beschaffung, Verarbeitung und Bewertung von Informationen hat auch mit Büchern (zB dem Schulbuch), Zeitschriften und mit Hilfe elektronischer Medien zu erfolgen. Nutzen und Problematik mathematischer Inhalte und Lernhilfen im Internet sind hier zu thematisieren. Die minimale Realisierung besteht in der gelegentlichen Einbeziehung derartiger Medien, die maximale Realisierung im gezielten Erwerb von Kompetenzen, die von der Informationsbeschaffung bis zur eigenständigen Abfassung und Präsentation mathematischer Texte und Facharbeiten reichen.

Lernen mit technologischer Unterstützung

Mathematiknahe Technologien wie Computeralgebra-Systeme, dynamische Geometrie-Software oder Tabellenkalkulationsprogramme sind im heutigen Mathematikunterricht unverzichtbar. Sachgerechtes und sinnvolles Nutzen der Programme durch geplantes Vorgehen ist sicherzustellen. Die minimale Realisierung besteht im Kennenlernen derartiger Technologien, das über exemplarische Einblicke hinausgeht und zumindest gelegentlich eine wesentliche Rolle beim Erarbeiten und Anwenden von Inhalten spielt. Bei der maximalen Realisierung ist der sinnvolle Einsatz derartiger Technologien ein ständiger und integraler Bestandteil des Unterrichts.

Der Lehrplan geht von drei Wochenstunden in jeder Schulstufe aus. Bei mehr als drei Wochenstunden ist vor allem eine vertiefte und aspektreichere Behandlung der Lerninhalte anzustreben. *Die kursiv gesetzten Inhalte sind für alle Schulstufen mit mehr als drei Wochenstunden obligatorisch.*

Das Verwenden von Symbolen für logische Begriffe und Beziehungen und das Beschreiben von Gesamtheiten mit Hilfe von Mengen und Mengenoperationen hat die Basis für exaktes Formulieren und Arbeiten zu legen.

Die im Lehrstoff formulierten Tätigkeiten und Inhalte sind zwar bestimmten Bereichen zugeordnet, können aber auch in anderen Bereichen angewendet werden.

Lehrstoff:

5. Klasse:

Zahlen und Rechengesetze

- Reflektieren über das Erweitern von Zahlenmengen an Hand von natürlichen, ganzen, rationalen und irrationalen Zahlen
- Darstellen von Zahlen im dekadischen und in einem nichtdekadischen Zahlensystem
- Verwenden von Zehnerpotenzen zum Erfassen von sehr kleinen und sehr großen Zahlen in anwendungsorientierten Bereichen
- bewusstes und sinnvolles Umgehen mit exakten Werten und Näherungswerten

- Aufstellen und Interpretieren von Termen und Formeln, Begründen von Umformungsschritten durch Rechengesetze
- *Arbeiten mit Primzahlen und Teilern, Untersuchen von Teilbarkeitsfragen*

Gleichungen und Gleichungssysteme

- Lösen von linearen und quadratischen Gleichungen in einer Variablen
- Lösen von linearen Gleichungssystemen in zwei Variablen, Untersuchen der Lösbarkeit dieser Gleichungssysteme, geometrische Interpretation
- Anwenden der oben genannten Gleichungen und Gleichungssysteme auf inner- und außermathematische Probleme

Funktionen

- Beschreiben von Abhängigkeiten, die durch reelle Funktionen in einer Variablen erfassbar sind (mittels Termen, Tabellen und Graphen), Reflektieren über den Modellcharakter von Funktionen
- Beschreiben und Untersuchen von linearen und einfachen nichtlinearen Funktionen (zB a/x , a/x^2 , ax^2+bx+c , abschnittsweise definierte Funktionen)
- Untersuchen von Formeln im Hinblick auf funktionale Aspekte, Beschreiben von direkten und indirekten Proportionalitäten mit Hilfe von Funktionen
- Arbeiten mit Funktionen in anwendungsorientierten Bereichen

Trigonometrie

- Definieren von $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ für $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$
- Durchführen von Berechnungen an rechtwinkligen und allgemeinen Dreiecken, an Figuren und Körpern (auch mittels Sinus- und Kosinussatz)
- Kennenlernen von Polarkoordinaten

Vektoren und analytische Geometrie der Ebene

- Addieren von Vektoren und Multiplizieren von Vektoren mit reellen Zahlen, geometrisches Veranschaulichen dieser Rechenoperationen
- Ermitteln von Einheitsvektoren und Normalvektoren
- Arbeiten mit dem skalaren Produkt, Ermitteln des Winkels zweier Vektoren
- Beschreiben von Geraden durch Parameterdarstellungen und durch Gleichungen, Schneiden von Geraden
- Lösen von geometrischen Aufgaben, gegebenenfalls unter Einbeziehung der Elementargeometrie

6. Klasse:

Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

- Definieren von Potenzen mit natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Exponenten, Definieren von Wurzeln und Logarithmen
- Formulieren und Beweisen von Rechengesetzen für Potenzen, Wurzeln und Logarithmen; Umformen entsprechender Terme

Folgen

- rekursives und explizites Darstellen von Folgen
- Untersuchen von Folgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz, intuitives Erfassen und Definieren des Begriffes Grenzwert
- Definieren der Eulerschen Zahl
- Arbeiten mit arithmetischen und geometrischen Folgen und Reihen, Erkennen des Zusammenhangs zwischen arithmetischen Folgen und linearen Funktionen sowie zwischen geometrischen Folgen und Exponentialfunktionen
- Verwenden von Folgen zur Beschreibung diskreter Prozesse in anwendungsorientierten Bereichen (insbesondere Geldwesen)

Gleichungen, Ungleichungen, Gleichungssysteme

- Arbeiten mit einfachen Ungleichungen (Abschätzungen, Umformungen, Fallunterscheidungen)
- Lösen von linearen Gleichungssystemen mit drei Gleichungen in drei Variablen
- *Kennenlernen von Näherungsverfahren zum Lösen von Gleichungen*

Reelle Funktionen

- Definieren, Darstellen und Untersuchen von Potenzfunktionen, von Exponential- und Logarithmusfunktionen sowie von Winkelfunktionen (Bogenmaß)
- Untersuchen von Eigenschaften reeller Funktionen (Monotonie, globale und lokale Extremstellen, Symmetrie, Periodizität) und von Beziehungen zwischen Funktionen (Umkehrfunktionen)

- Beschreiben von Änderungen durch Änderungsmaße (absolute und relative Änderung, Differenzenquotient)
- Anwenden von Funktionen zur Beschreibung kontinuierlicher Prozesse, Vergleichen von Modellen, Erkennen der Grenzen von Modellbildungen
- Kennenlernen von Verallgemeinerungen des Funktionsbegriffs
- *Verketten von Funktionen*

Analytische Geometrie des Raumes

- Übertragen bekannter Begriffe und Methoden aus der zweidimensionalen analytischen Geometrie, Erkennen der Grenzen dieser Übertragbarkeit
- Ermitteln von Normalvektoren, Definieren des vektoriiellen Produkts
- Beschreiben von Geraden und Ebenen durch Parameterdarstellungen bzw. Gleichungen
- Schneiden von Geraden und Ebenen, Untersuchen von Lagebeziehungen
- Lösen von geometrischen Aufgaben, gegebenenfalls unter Einbeziehung der Elementargeometrie und der Trigonometrie

Stochastik

- Arbeiten mit Darstellungsformen und Kennzahlen der beschreibenden Statistik
- Kennen des Begriffes Zufallsversuch, Beschreiben von Ereignissen durch Mengen
- Kennen der Problematik des Wahrscheinlichkeitsbegriffs; Auffassen von Wahrscheinlichkeiten als relative Anteile, als relative Häufigkeiten und als subjektives Vertrauen
- Berechnen von Wahrscheinlichkeiten aus gegebenen Wahrscheinlichkeiten; Arbeiten mit der Multiplikations- und der Additionsregel; Kennen des Begriffes der bedingten Wahrscheinlichkeit
- *Arbeiten mit dem Satz von Bayes*

7. Klasse:

Algebraische Gleichungen und komplexe Zahlen

- Abspalten reeller Linearfaktoren von Polynomen
- Reflektieren über die Zweckmäßigkeit des Erweiterns der reellen Zahlen
- Rechnen mit komplexen Zahlen
- *Kennenlernen des Fundamentalsatzes der Algebra*

Differentialrechnung

- Definieren des Differentialquotienten (Änderungsrate), ausgehend vom Differenzenquotienten (mittlere Änderungsrate), Deuten dieser Begriffe als Sekantensteigung bzw. Tangentensteigung, weiteres Deuten in außermathematischen Bereichen
- Kennen des Begriffes Ableitungsfunktion, Berechnen von Ableitungen elementarer Funktionen
- Deuten der zweiten Ableitung in inner- und außermathematischen Bereichen
- Herleiten von Differentiationsregeln zur Ableitung von Polynomfunktionen, Kennen weiterer Differentiationsregeln (sofern sie für Funktionsuntersuchungen verwendet werden)
- Untersuchen einfacher und im Hinblick auf Anwendungen sinnvoller Funktionen bezüglich Monotonie und Krümmungsverhalten, Ermitteln von Extrem- und Wendestellen
- Lösen von Extremwertaufgaben
- Präzisieren einiger Grundbegriffe und Methoden der Differentialrechnung (insbesondere des Begriffes Grenzwert) unter Einbeziehung des Begriffes Stetigkeit
- *Kennenlernen weiterer Anwendungen der Differentialrechnung*

Nichtlineare analytische Geometrie

- Beschreiben von Kreisen, Kugeln und Kegelschnittslinien durch Gleichungen
- Schneiden von Kreisen bzw. Kegelschnittslinien mit Geraden, Ermitteln von Tangenten
- Beschreiben von ebenen Kurven durch Parameterdarstellungen
- *Beschreiben von Raumkurven und Flächen durch Parameterdarstellungen*

Stochastik

- Kennen der Begriffe diskrete Zufallsvariable und diskrete Verteilung
- Kennen der Zusammenhänge von relativen Häufigkeitsverteilungen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen; von Mittelwert und Erwartungswert sowie von empirischer Varianz und Varianz
- Arbeiten mit diskreten Verteilungen (insbesondere mit der Binomialverteilung) in anwendungsorientierten Bereichen

8. Klasse:

Integralrechnung

- Ermitteln von Stammfunktionen
- Definieren des bestimmten Integrals, Deuten einer Summe von „sehr kleinen Produkten“ der Form $f(x) \cdot \Delta x$ als Näherungswert des bestimmten Integrals
- Kennen des Zusammenhangs zwischen Differenzieren und Integrieren sowie des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung
- Berechnen von bestimmten Integralen mit Hilfe von Stammfunktionen unter Verwendung elementarer Integrationsregeln
- Arbeiten mit verschiedenen Deutungen des Integrals (insbesondere Flächeninhalt, Volumen, physikalische Deutungen)

Dynamische Prozesse

- Beschreiben von Systemen mit Hilfe von Wirkungsdiagrammen, Flussdiagrammen, Differenzgleichungen oder Differentialgleichungen
- Untersuchen des dynamischen Verhaltens von Systemen
- Lösen von einfachen Differentialgleichungen, insbesondere $y' = k \cdot y$

Stochastik

- Kennen der Begriffe stetige Zufallsvariable und stetige Verteilung
- Arbeiten mit der Normalverteilung in anwendungsorientierten Bereichen
- Kennen und Interpretieren von statistischen Hypothesentests und von Konfidenzintervallen

Wiederholung

- umfassendes Wiederholen, Vertiefen und Vernetzen von Stoffgebieten